

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۸۰ دقیقه



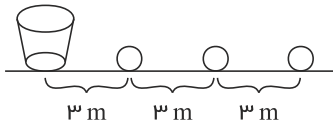
دبیرستان عرفان

نام آزمون: حسابان - یازدهم ریاضی - دیماه ۱۴۰۰

تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۱۸

۱) فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از ۲ ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

۲) در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا سبد ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



۳) نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۴) معادله زیر را حل کنید.

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$$

۵) اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۶) خط $4x + 3y = 5$ بر دایره‌ی C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

۷) اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به وسیله‌ی یک نوع ویروس آلوده می‌شوند، با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4 + t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان بر حسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

۸) نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

۹) کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

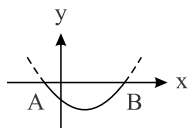
الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم دامنه تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0, 3]$ است.

۱۰) شکل نمایی جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود. الف)



مختصات نقاط انته‌ای عدسی A و B را به دست آورید.

ب) اگر x بر حسب سانتی‌متر باشد طول AB را به دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

۱۱) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

۱۲) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر -2 باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

۱۳ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

الف

$$h(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

۱۴ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

۱۵ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right], \quad -4 \leq x < 4$$

۱۶ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

۱۷ دامنه توابع زیر را بیابید.

الف

$$f(x) = \sqrt{8 - x}$$

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\text{زمان برگشت} = \frac{144}{V} \rightarrow \text{سرعت حرکت در خلاف جریان}$$

$$\text{زمان رفت} = \frac{144}{V+8} \rightarrow \text{سرعت حرکت در جهت جریان}$$

$$\frac{144}{V} + \frac{144}{V+8} = 17 - 2 \rightarrow 144 \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{V+8} \right) = 15$$

$$\frac{2V+8}{V(V+8)} = \frac{15}{144} = \frac{5}{48} \rightarrow 5V^2 + 40V = 96V + 384$$

$$\Rightarrow 5V^2 - 56V - 384 = 0 \rightarrow \Delta = 3136 + 7680 = 10816$$

$$V = \frac{56 \pm 104}{10} = -4,8 \text{ غ ق ق } , \boxed{V = 16}$$

دو توده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید $3 + 3 = 6$ متر طی کند، برای توپ دوم باید $12 = 6 + 6$ متر و برای توپ سوم $18 = 9 + 9$ متر و... طی کند. پس داریم:

$$\text{دنباله‌ی مسافت‌ها: } 6, 12, 18, \dots \quad a_1 = 6, d = 6$$

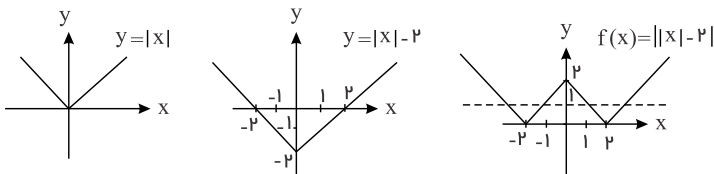
$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 918 \Rightarrow \frac{n}{2}(12 + 6n - 6) = 918$$

$$3n(n+1) = 918 \rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 306 = \underbrace{17 \times 18}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = 17$$

۲

داریم:

۳



خط $y = 1$ نمودار تابع f را در ۴ نقطه قطع می‌کند پس معادله $f(x) = 1$ دارای ۴ ریشه است، دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی.

$$f(x) = 1 \Rightarrow ||x| - 2| = 1 \Rightarrow |x| - 2 = \pm 1 \Rightarrow |x| = 3, |x| = 1$$

$$|x| = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}, \quad |x| = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

۴

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x = 3x+4 \Rightarrow x = 4$$

حال $x = 4$ را در معادله اولیه امتحان می‌کنیم.

$$x = 4 \Rightarrow 2\sqrt{4} = \sqrt{12+4} \Rightarrow 2 \times 2 = \sqrt{16} \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ قابل قبول}$$

۵

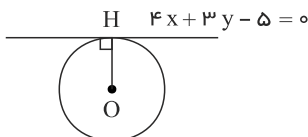
$$ax + 4y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{|a+8-1|}{\sqrt{a^2+16}} = 2 \Rightarrow |a+7| = 2\sqrt{a^2+16}$$

$$\Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64 \Rightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0$$

$$\Delta = 196 - 4 \times 3 \times 15 = 16 \rightarrow a = \frac{14 \pm 4}{6} \Rightarrow a = 3, \frac{5}{3}$$

۶

فاصله‌ی مرکز دایره تا خط همان شعاع دایره است.



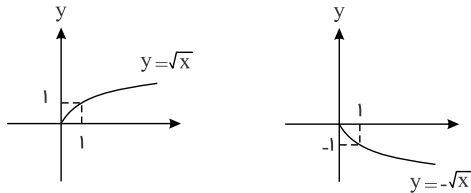
$$R = OH = \frac{|4(-1) + 3 \times 2 - 5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-4+6-5|}{5} = \frac{3}{5}$$

الف) $t = 5 \rightarrow n(5) = \frac{9500 \times 5 - 2000}{4 + 5} = \frac{45500}{9} = 5055,5$

ب) $n(t) = 5500 \Rightarrow \frac{9500t - 2000}{4 + t} = 5500$

$\Rightarrow 9500t - 2000 = 22000 + 5500t \Rightarrow 4000t = 24000 \Rightarrow t = 6$

۸) برای رسم $y = -\sqrt{x}$ باید نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.

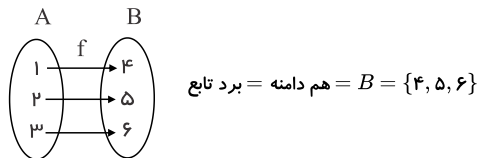


۹) الف) نادرست، ممکن است دامنه دو تابع برابر و برد آنها نیز برابر باشند ولی دو تابع برابر نباشند مانند:

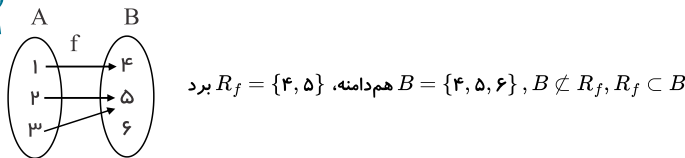
$f = \{(1, 2), (4, 5)\}$, $g = \{(1, 5), (4, 2)\}$

$D_f = D_g = \{1, 4\}$, $R_f = R_g = \{2, 5\} \Rightarrow f \neq g$

ب) درست، می‌تواند برد و هم دامنه تابع یکسان باشند، مانند:



پ) نادرست، برد تابع باید زیرمجموعه‌ای از هم دامنه تابع باشد.



ت) درست، می‌توان بی‌شمار تابع با ضابطه‌های متفاوت و دامنه یکسان $[0, 3]$ نوشت:

$f(x) = x$, $D_f = [0, 3]$, $g(x) = 2x^2 - x$, $D_g = [0, 3]$

۱۰) الف) نقاط A و B محل برخورد سهمی $y = x^2 - 8x - 20$ با محور x ها است یعنی باید معادله $y = 0$ را حل کنیم.

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 10) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 10$

$\Rightarrow A = (-2, 0), B = (10, 0)$

ب)

$AB = \sqrt{(-2 - 10)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{144} = 12cm$

پ) بیشترین ضخامت عدسی همان عرض نقطه رأس سهمی است.

$y = x^2 - 8x - 20 \Rightarrow$ رأس $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4 \Rightarrow y = 16 - 32 - 20 = -36$

بیشترین ضخامت عدسی $= |-36| = 36mm$

$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1} \xrightarrow{\times x(x+1)} 6(x+1) = 2x(x+1) + x(x-3)$

$6x + 6 = 2x^2 + 2x + x^2 - 3x \Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$

$\Delta = 49 - 4 \times 3 \times (-6) = 49 + 72 = 121 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 11}{6} \Rightarrow x = 3, x = -\frac{2}{3}$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

$x = -2 \rightarrow x^2 + kx^2 - x - 2 = 0 \rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \rightarrow k = 2$

$f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.

$$f(x) = x^x + 2x^x - x - 2$$

$$x^x + 2x^x - x - 2 \left| \begin{array}{l} x+2 \\ x^x-1 \end{array} \right.$$

$$\frac{-x^x - 2x^x}{-x - 2}$$

$$\frac{+x + 2}{0}$$

$$f(x) = (x + 2)(x^x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

روش دیگر: می توان $f(x)$ را تجزیه کرد.

$$x^x + 2x^x - x - 2 = x^x(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

۱۳

الف

$$h(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) & x < -1 \\ -(x-1) + x + 1 & -1 \leq x < 1 \\ x-1 + x+1 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

X	-1	1
X-1	-	-
X+1	-	+

۱۴

الف

$$x^x - 3x^x - 4 = 0, x^x = t \Rightarrow t^x - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0$$

$$t = 4, t = -1 \Rightarrow x^x = 4 \Rightarrow x = \pm 2, x^x = -1 \text{ غ ق ق}$$

۱۵

الف

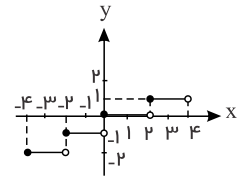
$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor \quad -4 \leq x < 4 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}x < 2$$

$$-2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \Rightarrow f(x) = -2, -4 \leq x < -2$$

$$-1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow f(x) = -1, -2 \leq x < 0$$

$$0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow f(x) = 0, 0 \leq x < 2$$

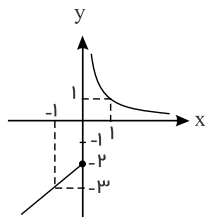
$$1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow f(x) = 1, 2 \leq x < 4$$



۱۶

الف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{cases}$$



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$

۱۷

الف

$$f(x) = \sqrt{\lambda - x}, \lambda - x \geq 0 \Rightarrow x \leq \lambda \Rightarrow D_f = (-\infty, \lambda]$$