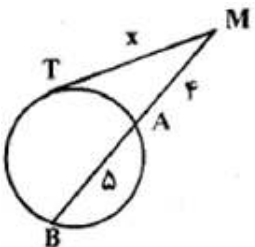
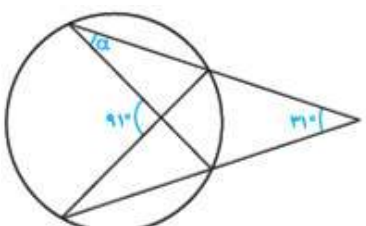
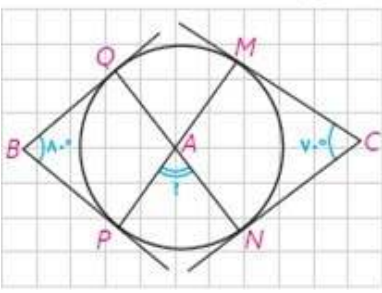
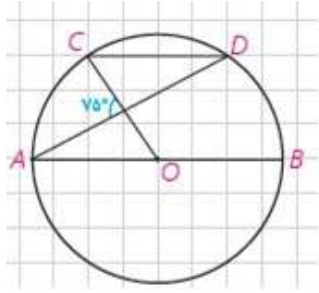


بارم	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	ردیف
۲	 <p>در شکل زیر مقدار X را به دست آورید.</p>	۱
۲	 <p>در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را به دست آورید.</p>	۲
۲	<p>در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی \hat{A} چند درجه است؟</p> 	۳



در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.

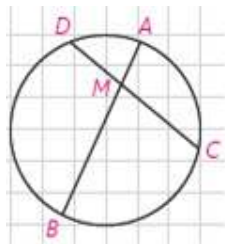
۲

۴

در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

۲

۵



در دایره $C(O, R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آن گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟

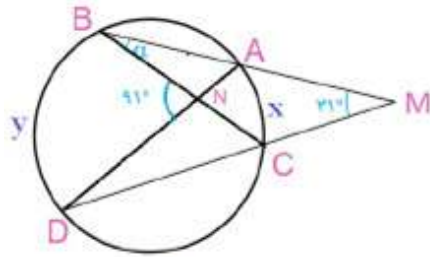
۲

۶

۲	<p>طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.</p>	۷
۲	<p>طول خط‌المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آنها 16π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.</p>	۸
۲	<p>مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.</p>	۹
۲	<p>دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.</p>	۱۰

پاسخنامه تشریحی

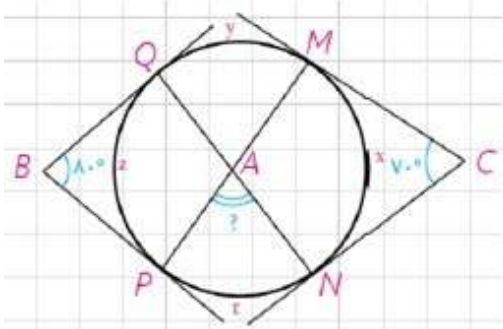
$$MT^2 = MA \times MB \quad (1/25) \Rightarrow x^2 = 4 \times 9 \quad (1/25) \Rightarrow x = 6 \quad (1/25)$$



$$\widehat{M} = \frac{y - x}{2} \Rightarrow 2 \times 31^\circ = y - x$$

$$\widehat{N} = \frac{y + x}{2} \Rightarrow 2 \times 91^\circ = y + x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = 62^\circ \\ y + x = 182^\circ \end{cases} \Rightarrow 2y = 244^\circ \Rightarrow y = 122^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

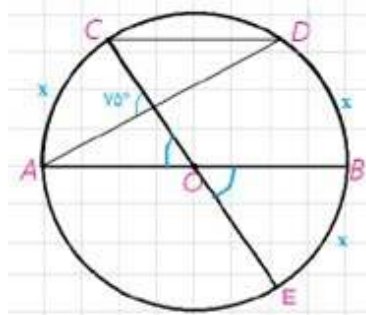


$$v^\circ = \frac{(y + z + t) - x}{2} \Rightarrow 14^\circ = (y + z + t) - x$$

$$w^\circ = \frac{(y + x + t) - z}{2} \Rightarrow 18^\circ = (y + x + t) - z$$

$$\begin{cases} 14^\circ = y + z + t - x \\ 18^\circ = y + x + t - z \end{cases} \Rightarrow 30^\circ = 2(y + t) \Rightarrow y + t = 15^\circ$$

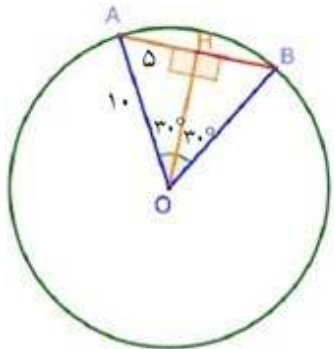
$$\widehat{A} = \frac{y + t}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{15^\circ}{2} = 7.5^\circ$$



$$75^\circ = \frac{(x + x) + x}{2} \Rightarrow 150^\circ = 3x \Rightarrow x = 50^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 2x \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

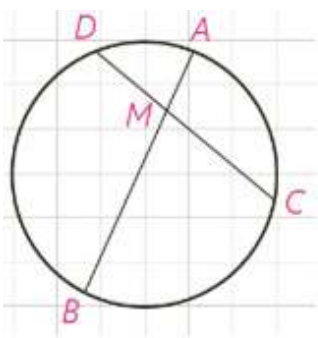
۵



می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH = 5$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} \Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

۶



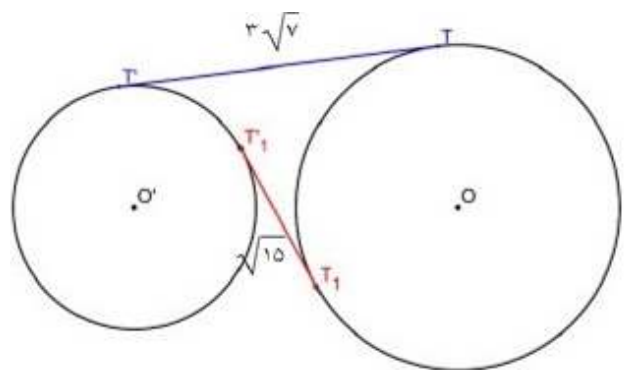
$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = 3 \Rightarrow MC = 6$$

$$DM \cdot MC = AM \cdot BM \xrightarrow{AM = x} 3 \times 6 = x(11 - x)$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = 9$$

پس $\frac{AM}{MB} = \frac{9}{2}$ یا $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}$

۷



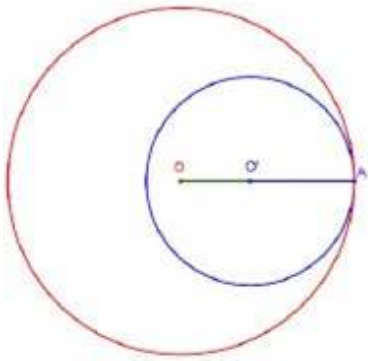
$$\begin{cases} TT'^2 = d^2 - (R^2 - R')^2 \\ T_1T_1'^2 = d^2 - (R + R')^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow R' = 3$$

با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:

۸



$$\text{مساحت ناحیه محدود بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi$$

$$\Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 16$$

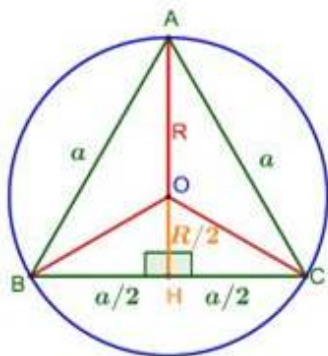
$$OO' = R - R' = 2$$

$$\xrightarrow{\hspace{1.5cm}} 2(R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8$$

$$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases} \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5, R' = 3$$

مرکز دایره‌ی محیطی نقطه‌ی O محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین:
راه اول:

$$AB = BC = AC = a, \quad BH = CH = \frac{a}{2}$$

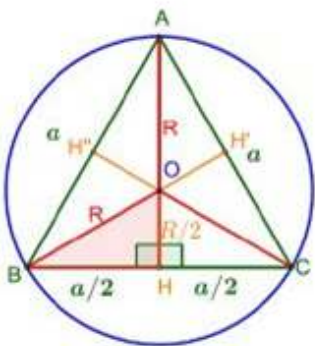


$$\left. \begin{aligned} OH &= \frac{OA}{2} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R \\ \triangle ACH : H &= 90^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} \\ &\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}R \Rightarrow a = \frac{3R}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = R\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(R\sqrt{3})^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

راه دوم: با توجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث هم‌نهشت ساخته شده است. این مثلث‌های به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند.



$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = 6S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{R}{2} \times \frac{R}{2} \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

در دو دایره مماس بیرون طول خط‌المركزین با جمع شعاع‌ها برابر است.

$$d = oo' = R + R' \Rightarrow d = 9 + 4 = 13$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$